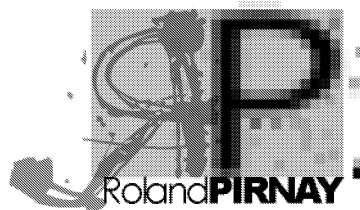




Cours de mathématique

6^{ème} année option 5 heures par semaine



2007 – 2008

Partie I

**TRIGONOMETRIE - NOMBRES
COMPLEXES**

Partie II

ANALYSE

Partie III

PROBABILITE

Partie IV

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Table des Matières

I	TRIGONOMETRIE - NOMBRES COMPLEXES	2
1	SYNTHÈSE DE TRIGONOMÉTRIE (RAPPEL)	3
1.1	Conversion d'unités d'angles	3
1.2	Le cercle trigonométrique	3
1.3	Nombres trigonométriques d'un angle orienté	3
1.4	Signe des nombres trigonométriques	5
1.5	Propriétés des nombres trigonométriques	5
1.6	Angles associés	5
1.7	Nombres trigonométriques d'angles remarquables	6
1.8	Equations trigonométriques	6
1.9	Les formules d'addition	7
1.10	Les formules de duplication	8
1.11	Les formules de linéarisation	10
1.12	Les formules de factorisation	11
1.13	Toutes les formules	12
2	LES NOMBRES COMPLEXES	13
2.1	Introduction	13
2.2	Nombre complexe sous la forme d'un couple	15
2.2.1	Définitions	15
2.2.2	Règles de structure de \mathbb{C}	15
2.2.3	Exercices	16
2.3	Nombre complexe sous la forme algébrique	17
2.3.1	Puissances de i à exposants naturels	17
2.3.2	Opérations dans \mathbb{C} (Forme algébrique)	18
2.3.3	Nombres complexes conjugués	19
2.3.4	Module d'un nombre complexe	19
2.3.5	Exercices	20
2.4	Nombre complexe sous la forme vectorielle - Représentation géométrique	21
2.5	Nombre complexe sous la forme trigonométrique	22
2.5.1	Passage d'une écriture à l'autre	23
2.5.2	Opérations dans \mathbb{C} (Forme trigonométrique)	23
2.5.3	Racine $n^{\text{ième}}$ de $z = \rho \text{ cis } \theta$	24
2.5.4	Exercices	26
2.6	Calcul de sommes	27
2.7	Polynômes complexes	27
2.7.1	Zéro d'un polynôme	27
2.7.2	Zéros d'un polynôme de second degré à coefficients réels dans \mathbb{C}	27
2.7.3	Loi du reste	28
2.7.4	Divisibilité par $(z - a)(z - b)(z - c)$ $a \neq b \neq c \neq a$	28
2.7.5	Factorisation	28
2.7.6	Polynômes à coefficients réels	29
2.7.7	Fractions rationnelles	29
2.7.8	Exercices	29

2.8	Nombre complexe et géométrie plane	31
2.8.1	Transformation définie par $z \rightarrow z + c$	31
2.8.2	Transformation définie par $z \rightarrow k.z$ ($k \in \mathbb{R}_0$)	32
2.8.3	Transformation définie par $z \rightarrow \text{cis } \alpha.z$	32
2.8.4	Transformation définie par $z \rightarrow az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$)	33
2.8.5	Exercices	33
 II ANALYSE		 34
3 NOTIONS DE BASE SUR LES FONCTIONS		35
3.1	Ce qu'il faut absolument connaître!	35
3.1.1	Le binôme du premier degré	35
3.1.2	Le trinôme du second degré	35
3.1.3	Etude du signe d'un produit ou d'un quotient	36
3.2	Les fonctions : domaine de définition	36
3.3	Synthèse sur les fonctions	38
3.4	Les fonctions associées	40
3.5	Exercices	44
 4 FONCTIONS ET GRAPHIQUES		 45
4.1	Comparaison de deux fonctions	45
4.2	Composée de deux fonctions	49
4.3	Réciproque d'une fonction	51
 5 LES LIMITES		 55
5.1	Introduction	55
5.2	Limite d'une variable	58
5.3	Extension de la limite d'une variable	59
5.4	Quelques notions préliminaires	59
5.4.1	Voisinage d'un réel	59
5.4.2	Point adhérent à une partie de \mathbb{R}	60
5.4.3	Point isolé d'une partie de \mathbb{R}	61
5.5	Limite d'une fonction dans les "cas finis"	61
5.5.1	Définition	61
5.5.2	Propriétés des limites	65
5.5.3	Exercices (Adhérence, fonctions usuelles)	68
5.5.4	Limite à gauche et limite à droite	69
5.5.5	Les cas d'indétermination	74
5.5.6	Exercices	75
5.5.7	Limites de fonctions trigonométriques	78
5.6	Limite d'une fonction dans les "cas infinis"	81
5.6.1	Exemple introductif	81
5.6.2	Contexte	81
5.6.3	Définitions	82
5.6.4	Propriétés	83
5.6.5	Exemples	85
5.6.6	Exercices	86
5.7	Limites et Asymptotes	88
5.7.1	Définition d'une asymptote	88
5.7.2	Asymptote verticale	88
5.7.3	Asymptote horizontale	91
5.7.4	Asymptote oblique	94
5.7.5	Exercices	99

6	CONTINUITÉ	100
6.1	Introduction	100
6.2	Fonction continue en un réel	101
6.3	Fonction continue sur une partie de \mathbb{R}	103
6.4	Propriétés	104
6.5	Exercices	106
6.6	Recherche de racines d'une équation	108
7	LES DÉRIVÉES	110
7.1	Introduction	110
7.1.1	Point de vue cinématique	110
7.1.2	Bilan et lacunes	111
7.1.3	Intérêt de l'utilisation des tangentes	112
7.1.4	Tangente à une courbe: définition	112
7.1.5	Tangente à une courbe: exemple	113
7.2	Nombre dérivé d'une fonction en un nombre réel	114
7.3	Fonction dérivée d'une fonction	116
7.4	Formulaire de dérivation	117
7.5	Nombre dérivé et tangente	129
7.6	Dérivée première et variations d'une fonction	131
7.6.1	Vocabulaire et définitions	131
7.6.2	Propriétés	131
7.6.3	Remarques importantes	135
7.6.4	Quelques exemples	136
7.6.5	Exercices	137
7.7	Dérivée seconde et concavité	140
7.7.1	Vocabulaire	140
7.7.2	Propriétés	141
7.7.3	Quelques exemples	142
7.7.4	Exercices	143
8	REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION	147
8.1	Schéma d'étude	147
8.2	Exemple	148
8.3	Exercices	148
9	APPLICATION DES DÉRIVÉES	151
9.1	Problèmes d'optimisation	151
9.2	Règle de l'HOSPITAL-BERNOULLI	156
III	PROBABILITÉ	159
10	ANALYSE COMBINATOIRE	160
10.1	Mise en situation	160
10.2	Notions de base	160
10.3	Groupements sans répétition	164
10.3.1	Arrangements sans répétition	164
10.3.2	Permutations sans répétition	165
10.3.3	Combinaisons sans répétition	166
10.4	Groupements avec répétitions	167
10.4.1	Arrangements avec répétitions	167
10.4.2	*Permutation avec répétitions*	168
10.4.3	*Combinaisons avec répétitions*	168
10.5	Exercices	168
10.6	Triangle de Pascal	172

10.7	Le binôme de Newton	173
11	Probabilité	175
11.1	Exercices introductifs	175
11.2	Calcul élémentaire des probabilités	176
11.2.1	Vocabulaire	176
11.2.2	Exemples	177
11.2.3	Définition, propriétés	178
11.2.4	Exercices	183
11.3	Probabilités conditionnelles - Indépendance	186
11.4	Exercices divers	190
IV	GEOMETRIE DANS L'ESPACE	192
12	GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE : LES BASES	193
12.1	Généralités	193
12.2	Axiomes d'incidence	194
12.3	Positions relatives de droites et plans	194
12.4	Parallélisme dans l'espace	195
12.4.1	Définitions	195
12.4.2	Parallélisme entre droites	196
12.4.3	Parallélisme entre plans	196
12.4.4	Parallélisme entre droite et plan	197
12.5	Orthogonalité dans l'espace	197
12.5.1	Définitions	197
12.5.2	Orthogonalité d'une droite et d'un plan	198
12.5.3	Orthogonalité de deux droites de l'espace	199
12.6	Exercices	199
13	Vecteurs et repère de l'espace E	202
13.1	Vecteurs de l'espace E	202
13.1.1	Définition	202
13.1.2	Addition et soustraction des vecteurs de l'espace E	204
13.1.3	Produit d'un vecteur par un nombre réel	207
13.2	Repère dans l'espace E	210
13.2.1	Définitions	210
13.2.2	Coordonnées d'un point de l'espace	210
13.2.3	Composantes d'un vecteur de l'espace	212
14	Produit scalaire dans l'espace	216
14.1	Espace métrique	216
14.2	Produit scalaire de deux vecteurs	216
14.3	Exercices	219
15	GEOMETRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE	222
15.1	Prérequis : les déterminants	222
15.2	Le plan	224
15.2.1	Equation du plan passant par un point donné et de vecteurs-directeurs donnés	224
15.2.2	Equation du plan passant par deux points et un vecteur-directeur	224
15.2.3	Equation du plan passant par trois points donnés	225
15.2.4	Plans parallèles	225
15.2.5	Plans parallèles aux plans de base, plans parallèles aux axes	225
15.2.6	Vecteurs-directeurs d'un plan π dont on donne l'équation	225
15.3	La droite	226

15.3.1	Equations d'une droite d passant par un point donné A et de vecteur-directeur donné	226
15.3.2	Equations cartésiennes d'une droite d passant par deux points donnés A et B .	227
15.3.3	Droites parallèles d et d'	228
15.3.4	Vecteur-directeur d'une droite donnée d par ses équations cartésiennes	228
15.3.5	Intersection d'une droite d et d'un plan π	228
15.3.6	Parallélisme d'une droite d et d'un plan π	229
15.4	Problèmes en repère orthonormé	229
15.4.1	Distance entre deux points - norme d'un vecteur - produit scalaire - orthogonalité	229
15.4.2	Vecteur normal à un plan	230
15.4.3	Distances	231
15.4.4	Sphère	231
15.4.5	Angles des droites et des plans	231
15.5	Exercices	232
15.6	Solutions des exercices	233
A	Les quantificateurs mathématiques	235
B	Fonction ou application?	237